МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ЗОЛОТОЕ РУНО.

8 класс. Теория чисел–1. 29 мая 2009.

1. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к числу на доске прибавляют какую-нибудь его ненулевую цифру. Докажите, что когда-нибудь на доске бесконечно много раз появится четное число.

2. Сколько существует пятизначных чисел, кратных 101 и одинаково читающихся слева направо и справа налево?

3. Найдите все натуральные n, для которых число $n^3 - 5n^2 + 9n - 6$ – точный квадрат.

4. Докажите, что каждое натуральное число можно записать в виде $\frac{mn+1}{m+n}$ с натуральными m и n.

5. Найдите все простые числа p, q и r такие, что $\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1$.

6. Четыре из девяти разных натуральных чисел покрасили в синий цвет, а остальные – в красный. Затем подсчитали все 20 результатов деления синего числа на красное. Какое наименьшее количество разных результатов могло получиться?

7. Сколькими способами из чисел от 1 до 101 можно выбрать два таких числа x и y, чтобы x^2-y^2-1 делилось на 101?

8. При каких натуральных n наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$ не делится ни на одно из чисел $n+1$, $n+2$, $n+3$?

9. Решите в целых числах уравнение $x^2 + x^3 = 2^y + 16$.